

Численное моделирование волновых процессов в заливе

А. Брегвадзе, Т. Чантуриа

Государственный Университет Акакия Церетели
amiranibregvadze@gmail.com, tengochanturia@rambler.ru

Аннотация - В работе рассматриваются вопросы численного моделирования трансформации нелинейных поверхностных гравитационных волн в условиях мелководных заливов. Дискретная модель построена на основе нелинейных уравнений мелкой воды. Приведены граничные и начальные условия. Методом расщепления по физическим процессам получена система из трех уравнений. Для решения системы уравнений использован метод прогонки. Представлены профили поверхностных гравитационных волн для различных этапов распространения.

Ключевые слова: уравнения мелкой воды, численное моделирование, нелинейные поверхностные гравитационные волны, трансформация профилей

I. Введение

В связи с исследованием экосистем мелководных прибрежных районов немаловажную роль играют волновые явления, происходящие на поверхности и в толще водной среды. Эти явления, как и любые природные явления, носят сложный, нелинейный характер. Следовательно, их прогнозирование и диагностика должна быть основана на применении нелинейных математических моделей реальных процессов.

Данная работа посвящена численному решению дискретных уравнений мелкой воды с условиями, привязанными к гидрофизическим параметрам Черного моря.

II. Система уравнений мелкой воды. Граничные и начальные условия

Поверхностные гравитационные волны на мелководье описываются уравнениями мелкой воды.

Система уравнений мелкой воды содержит уравнение неразрывности и динамическое уравнение на основе закона сохранения импульса [1]

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial (u(H+\zeta))}{\partial x} \end{cases} \quad (1)$$

Где u – скорость частиц среды, ζ – функция возвышения поверхности, H – глубина жидкости. Уравнения мелкой воды не учитывают эффект дисперсии из-за её незначительности на мелководье. В качестве граничных условий на свободной поверхности жидкости выполняется кинематическое граничное условие, т.е. скорость возвышения поверхности совпадает с вертикальной скоростью частиц среды: На дне предполагаем равенство нулю скорости частиц жидкости. Возмущение на поверхности задаем в виде гармонического закона. Начальное условие для скорости частиц представляем как $u(x,0) = 0$, $u(0,t) = a \sin(\omega t)$, где a , ω – амплитуда и частота поверхностной волны

III. Построение дискретной модели

Для первого уравнения системы (1) запишем дискретный аналог производной по временной координате:

$$\frac{u^i - u^{i-1}}{\tau} + u^i \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

Применим к этому уравнению метод расщепления по физическим процессам [3].

$$\begin{cases} \frac{u^i - u^{i-1}}{\tau} + u^i \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{(u^i - u^{i-1})}{\tau} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \end{cases} \quad (2)$$

где u и u^i – компоненты скорости на текущем и вспомогательном временных слоях; u^i – компонента

скорости на следующем временном слое, τ — шаг по времени, μ — параметр искусственной вязкости.

Уравнения мелкой воды относятся к системам уравнений гиперболического типа. Нелинейные гиперболические уравнения по сравнению с линейными уравнениями обладают рядом принципиальных отличий, которые особенно важно учитывать при их численном интегрировании. Даже при сколь угодно гладких начальных условиях решение нелинейных уравнений может содержать разрывы. Во избежание этой проблемы при практическом решении задач нелинейной механики в дифференциальную систему вводится малое дополнительное возмущение в виде искусственной вязкости [3], которая устраняет разрывы и приводит к адекватным результатам. Такой прием применяется и в данной работе.

Умножим второе уравнение системы (2) на $(H + \zeta)$ и возьмем производную по x от обеих частей

С учетом второго уравнения системы (1) уравнение (3) примет вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (u \zeta)}{\partial x} = \tau g \left(\frac{\partial}{\partial x} \left((\zeta + H) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial x} (u^2 H)$$

Таким образом, для рассматриваемого случая система уравнений мелкой воды приобретет следующий окончательный вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (u \zeta)}{\partial x} = \tau g \left(\frac{\partial}{\partial x} \left((\zeta + H) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial x} (u^2 H) \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{cases} \quad (3)$$

Полученное выражение является уравнением связи уровня свободной поверхности жидкости ζ с u .

С помощью компоненты скорости частиц среды на текущем временном слое находятся компоненты на вспомогательном временном слое. Затем, из второго уравнения находится функция возвышения уровня свободной поверхности. Из третьего уравнения находятся компоненты скорости частиц на следующем временном слое. Разностная схема уравнений (3) была разработана с помощью интегро-интерполяционного метода на равномерной сетке по неявной схеме.

Дискретным аналогом первого уравнения системы (3) будет следующее уравнение:

$$\frac{\tilde{u}_i^{j+1/2} - \tilde{u}_i^j}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^j + u_i^j}{2} + \frac{u_{i-1}^j + u_i^j}{2} \cdot \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{h_x} \right) =$$

$$\mu \left(\frac{u_{i+1}^{j+1/2} - u_i^{j+1/2}}{h_x^2} - \frac{u_i^{j+1/2} - u_{i-1}^{j+1/2}}{h_x^2} \right) \quad (4)$$

Дискретным аналогом второго уравнения системы (3) будет уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\zeta_i^{j+1} - \zeta_i^j}{\tau} + \left(\frac{u_{i+1}^j \zeta_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^j \zeta_{i-1}^{j+1}}{2h_x} \right) = \\ \tau g \left(\left(\frac{\zeta_{i+1}^j + \zeta_i^j + H_{i+1} + H_i}{2} \right) \frac{\zeta_{i+1}^{j+1} + \zeta_i^{j+1}}{h_x^2} - \right. \\ \left. \left(\frac{\zeta_{i-1}^j + \zeta_i^j + H_{i-1} + H_i}{2} \right) \frac{\zeta_i^{j+1} + \zeta_{i-1}^{j+1}}{h_x^2} \right) - \\ \left(\frac{u_{i+1}^j H_{i+1} - u_{i-1}^j H_{i-1}}{2h_x} \right) \end{aligned}$$

Дискретным аналогом третьего уравнения системы (3) будет уравнение

$$\frac{\tilde{u}_i^{j+1/2} - \tilde{u}_i^j}{\tau} = -g \frac{\zeta_{i+1}^{j+1} - \zeta_{i-1}^{j+1}}{2h_x}$$

Алгоритм решения системы уравнений (4) заключается в следующем: – через компоненты скорости на текущем временном слое u из первого уравнения найдем компоненты на вспомогательном временном слое \tilde{u} ; – из второго уравнения определим уровень свободной поверхности жидкости ζ ; – из третьего уравнения вычислим компоненты скорости на следующем временном слое.

Для решения системы уравнений использован метод прогонки

IV. Моделирование распространения нелинейных поверхностных гравитационных волн в условиях залива

Рассмотрим особенности моделирования процесса распространения поверхностных гравитационных волн на мелководье. Для этого необходимы некоторые гидрофизические данные акватории. В качестве мелководной акватории используем подходящий канал потииского порта



Рис. 1. Подходный канал потииского порта

Центральная часть береговой зоны подходный канала потииского порта, формируется и развивается под влиянием твёрдого стока р. Риони. Река выносит в море песчано-илистые наносы, и её современный твёрдый сток составляет около 5 млн. м³ в год. Диаметр фракции, подавляющей части твёрдого стока реки, не превышает 1 мм. Объём пляжеобразующих фракций диаметром 0,1 мм и более составляет 1.2-1.4 млн. м³. Существующие надводные пляжи сложены из мелкофракционного песчаного материала. Подводный склон, до 10 метровой изобаты, имеет уклон $\text{tg}\alpha=0.007-0.008$, т.е. 7-8 метровые изобаты расположены в километре от урезовой линии. Практически везде на подводном склоне распространены 3-4 ряда подводных валов, которые сложены из мелкопесчаных наносов. Основные миграции наносов как в поперечном, так и вдольбереговом направлениях, во время штормовых волнений моря, происходят в пределах валов.

Мощность этих миграции оценивается в несколько сот тысяч кубометров в год. В случае возникновения дефицита наносов валы деградируют и берег подвергается размыву. Самый дальний и мощный вал расположен в 400-500 метрах от урезовой линии, и он имеет симметричную форму – уклоны, как в сторону моря, так и в сторону берега равны между собой. Вершина вала находится на глубине 3.7-4.3 метров. Ширина вала у подножья колеблется в пределах 250-300 метров. Объем вала составляет 770-800 тыс. куб. метров на погонный километр. Более ближние к берегу валы менее мощные, и они имеют асимметричную форму. Эти валы меняют свою форму даже при небольших волнениях моряю

В подходном канале волновые движения проявляются, прежде всего, в виде ветрового волнения. Оно развивается быстро и примерно через 2 часа после возникновения ветра достигает установившегося состояния. В открытом море, как правило, образуются короткие и очень крутые волны. В холодную часть года господствующие северо-восточные и восточные ветры вызывают волнение большой силы, при котором высота волн в открытом море равняется 2,2 м, а иногда и 4,0 м. Чаше всего волны достигают длины 12–18 м и высоты от 0,7 до 1.2 м

В данной работе представлены результаты моделированию динамики нелинейных поверхностных гравитационных волн в заливе подходного канала порта поти.

На рисунке 2 представлены результаты численного расчета ζ -поверхностной гравитационной

волны для разных значений ζ в зависимости от времени t

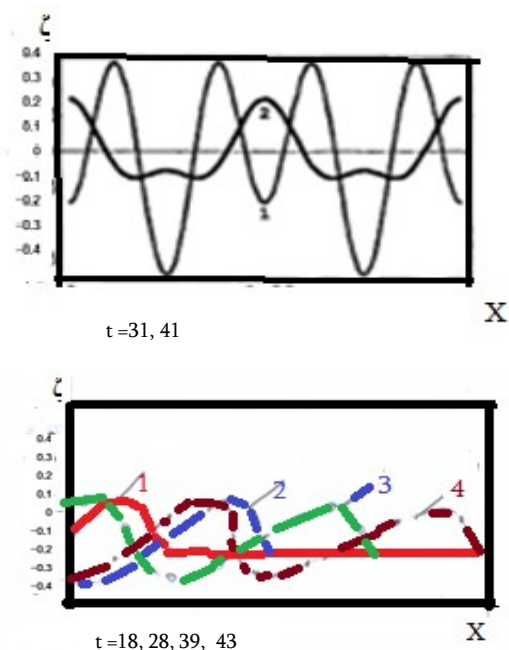


Рис.2. профиль поверхностной гравитационной волны в зависимости от времени

На рисунках 3,4,5 представлены результаты численного моделирования и экспериментальные профили поверхностной волны, взятые из работы [2,6], на разных этапах распространения. Из их сравнения с авторскими результатами (Рис 2) следует: – у начала волнореза экспериментальные профили поверхностных волн начинают искажаться из-за уменьшения глубины; передний фронт гребня укручивается, впадины сглаживаются (Рис. 3,4); – при дальнейшем распространении волны над волнорезом гребни заостряются; во впадине появляется промежуточный гребень (Рис. 5); – поверхностная волна (из-за влияния глубины) в дальнейшем из синусоидальной преобразуется в нелинейную с крутым передним фронтом (Рис. 2, кривая 4) как в начальной стадии экспериментального пути (Рис. 3); – увеличение начальной крутизны приводит в авторской модели к появлению промежуточного гребня во впадине (Рис.2. ,кривая-3), что соответствует экспериментальному профилю (Рис.5)

V. Выводы

Проведенный расчет свидетельствует, что результаты численного моделирования нелинейных поверхностных гравитационных волн на основе уравнений мелкой воды в целом имеют хорошее совпадение с экспериментальными измерениями (рис.3,4,5) и численными результатами других авторов [2,6].

В заключении можно отметить, что рассмотренный метод позволяет проследить рефракцию нелинейных поверхностных гравитационных волн на береговых образованиях в условиях залива

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лемб Г. Гидродинамика . –М.: Гостехиздат, 1947. – 524с
- [2] Kawasaki K. Numerical simulation of breaking and post-breaking wave deformation process around a submerged breakwater // Coastal Eng. J. – 1999. –V. 41, N. 3&4. – P.
- [3] Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1967. – 196 с.
- [4] Вольцингер Н.Е., Пяковский Р.В. Теория мелкой воды. Океанологические задачи и численные методы. – Л.: Гидрометеоздат, 1977. – 207 с.
- [5] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 636 с.
- [6] Аббасов И.Б. Моделирование рефракции нелинейных поверхностных гравитационных волн на береговых склонах разной крутизны // Известия ЮФУ . Технические науки. – 2010. – № 6 (107).– С.149-154.

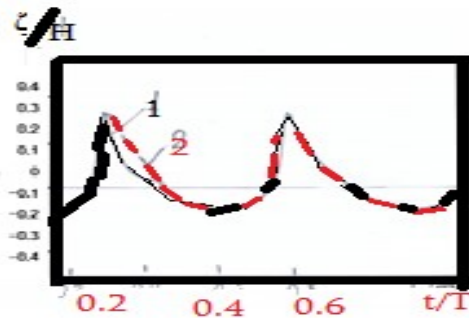


Рис.3. профили поверхностной волны в начале волнореза

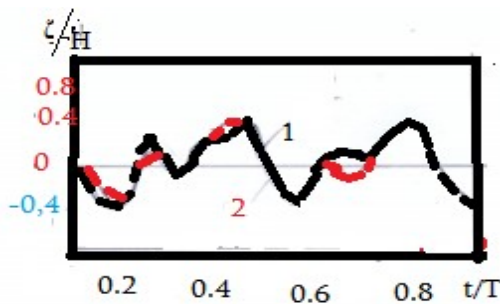


Рис.4 профили поверхностной волны над волнорезом

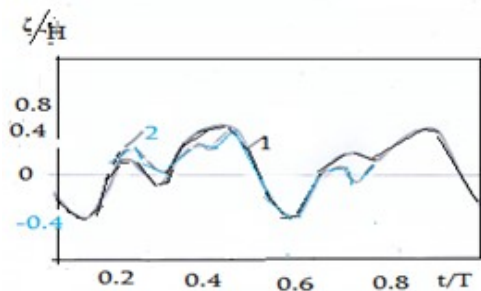


Рис.5 профили поверхностной волны за волнорезом