

მცირე სიღრმის მქონე წყალსაცავებში წყლის დინამიკური მახასიათებლების რიცხვითი მოდელირება

აკაკი გირგვლიანი

აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, ქ ქუთაისი, საქართველო
Akaki1954@gmail.com

ანოტაცია - ნაშრომი ეხება შიდა წყალსაცავების დინამიკის მათემატიკურ მოდელირებას. მასში შემოთავაზებულია ორგანომომენტებიანი რიცხვითი მოდელი, რომელსაც საფუძვლად უდევს წყლის მოძრაობისა და უწყვეტობის განტოლებების ვერტიკალის მიხედვით ინტეგრებით მიღებული სისტემა. ამოცანის ამოხსნა ხორციელდება სასრულ-სხვაობიანი მეთოდების გამოყენებით. მიღებული ალგორითმის აპრობაციისათვის ჩატარებულია რიცხვითი ექსპერიმენტები საკმაოდ რთული რელიეფის მქონე მოდელური არისათვის.

საკვანძო სიტყვები - რიცხვითი მოდელირება, წყლის დინამიკა, სხვაობიანი სქემები, პროგრამირება.

I. შესავალი

წყლის რესურსების დაცვისა და რაციონალური გამოყენების პრობლემა საკმაოდ დიდი ხანია დგას დღის წესრიგში და დღეისათვის შესაბამისი სამეცნიერო წრეების მნიშვნელოვანი ნაწილი არის ამ საქმეში ჩართული. უნდა აღინიშნოს რომ ჩატარებული კვლევების დიდი ნაწილი ეძღვნება მსოფლიო ოკეანისა და მისი ნაწილების გლობალურ ფართომასშტაბიან პრობლემების შესწავლას [1-3], ხოლო შიდა წყალსაცავებსა და მათ მიმდებარე რეგიონებში მიმდინარე ლოკალური ფიზიკური პროცესების თეორიული კვლევა თითქმის საწყის ეტაპზეა.

მცირე ზომის წყალსაცავის მნიშვნელობა ისეთი ხასიათის მასშტაბურ პრობლემებზე, როგორცაა ამინდის პროგნოზი და გლობალური დათბობა ნაკლებად შესამჩნევია, მაგრამ მიმდებარე რეგიონის ბუნებაზე, ეკონომიკური ინფრასტრუქტურის განვითარებასა და ეკოლოგიურ მდგომარეობაზე

მისი ზეგავლენა საკმაოდ დიდია. ამიტომ შესაბამისი მახასიათებლების თეორიულად დასაბუთებული პროგნოზირება მნიშვნელოვან სამეცნიერო და პრაქტიკულ ინტერესს შეიცავს.

II. ძირითადი ნაწილი

1. ამოცანის დასმა

ჩავთვალოთ, რომ განსახილველ წყალსაცავში წყლის სიღრმე გაცილებით ნაკლებია მის ჰორიზონტალურ ზომებზე, რაც შიდა ტბებისათვის უმეტეს შემთხვევაში დიდი სიზუსტით სრულდება. ასეთ შემთხვევაში წყლის მასის ვერტიკალური სტრატეფიკაცია თითქმის ერთგვაროვანია და სამგანზომილებიანი ამოცანის ნაცვლად შეიძლება განვიხილოთ ორგანომომენტებიანი, ბრტყელი ამოცანა.

კოორდინატთა სისტემა მოვათავსოთ ისე, რომ ის დაემთხვეს წყლის თავისუფალ ზედაპირს, OX ღერძი მივმართოთ აღმოსავლეთისაკენ, ხოლო OY ღერძი კი - ჩრდილოეთისაკენ. აღვნიშნოთ $h(x, y)$ - ით ფუნქცია, რომელიც აღწერს ფსკერის რელიეფს, ხოლო $-\xi(x, y, t)$ - ით წყლის ზედაპირის გადახრა შეუშფოთებელი მდგომარეობიდან. ცხადია წყლის სიღრმე განსახილველ არეში აღინერება ფუნქციით: $H(x, y, t) = h(x, y) + \xi(x, y, t)$.

ამრიგად მივიღებთ ორგანომომენტებიან $D(x, y)$ არეს, რომლის საზღვარი S - აღინერება ფსკერის რელიეფისა და წყლის თავისუფალი ზედაპირის თანაკვეთით.

განსახილველ არეში წყლის მოძრაობისა და უწყვეტობის განტოლებები ვერტიკალის მიხედვით ინტეგრების შედეგად შეიძლება ჩაენეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u U}{\partial x} + u \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v U}{\partial y} + v \frac{\partial U}{\partial y} \right) -$$

$$-fV + g\eta \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{F_x}{\eta},$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial uV}{\partial x} + u \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial vV}{\partial y} + v \frac{\partial V}{\partial y} \right) + fU + g\eta \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{F_y}{\eta}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial U\eta}{\partial x} + \frac{\partial V\eta}{\partial y} = 0.$$

სადაც: u და v წყლის ნაკადის სიჩქარის ვექტორის კომპონენტებია შესაბამისად OX და OY ღერძების გასწვრივ, f - კორიოლისის პარამეტრია, g - თავისუფალი ვარდნის აჩქარება დედამიწაზე, F_x და F_y ფუნქციები აღწერენ ქარის ხახუნის დაძაბულობას და დაძაბულობას ფსკერთან ხახუნის გამო. მათი პარამეტრიზაცია მოყვანილი იქნება მოგვიანებით. გარდა ამისა (1) სისტემაში მიღებულია აღნიშვნები: $\eta = \sqrt{H}$, $U = u \cdot \eta$, $V = v \cdot \eta$.

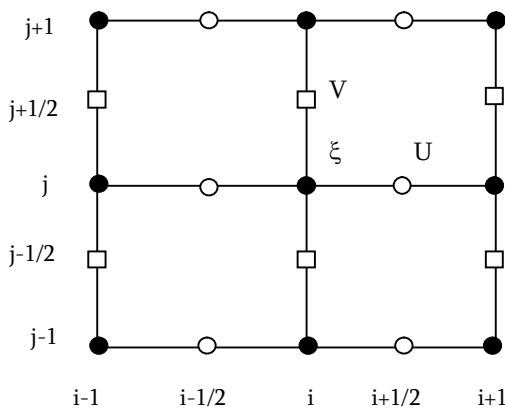
(1) სისტემის ამონახსნი ვეძებთ შემდეგი სასაზღვრო და საწყისი პირობებით:

$$U = V = 0, \quad S - \text{საზღვარზე}$$

$$U = U^0, \quad V = V^0, \quad \xi = \xi^0 \quad \text{როცა } t = t^0 \quad (2)$$

2. მოცანის ამოხსნის ალგორითმი

(1), (2) ამოცანის ამოხსნა მისი სირთულის გამო ანალიზური მეთოდებით ვერ ხერხდება, რის გამოც იტყუებული ვართ შესაბამისი მიახლოებითი ამოხსნები ვეძებთ რიცხვითი მეთოდების გამოყენებით. ამისათვის განსახილველი უწყვეტი ორგანოზომილებიანი $D(x, y)$ არე შევცვალოთ სხვაობიანი $D^h(x, y)$, რომელშიც მოთვლინდესიანი (i, j) წერტილების პარალელურად განვიხილოთ შუალედურებიც $(i+1/2, j)$ და $(i, j+1/2)$ (ნახ. 1.). საძიებელი უწყვეტი ფუნქციები U , V და ξ უნდა შევცვალოთ ბადური ფუნქციებით U^h , V^h და ξ^h , ამასთან ξ^h ფუნქცია მოთავსებულია ბადის მოთვლინდესიან კვანძებში, ხოლო U^h , და V^h ფუნქციები



ნახ. 1. სხვაობიანი ბადის სტრუქტურა.

გადაადგილებულია ნახევარი ბიჯით შესაბამისად OX და OY ღერძების გასწვრივ.

საჭიროების შემთხვევაში ბადური ფუნქციების ინტერპოლაცია შუალედური კვანძებიდან მოთვლი და პირიქით ხორციელდება წრფივი ფორმულებით:

$$\varphi_k = \frac{\varphi_{k-1/2} + \varphi_{k+1/2}}{2}, \quad \varphi_{k+1/2} = \frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2}.$$

(1) დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის სივრცითი დიფერენციალური ოპერატორი A უნდა შევცვალოთ შესაბამისი სასრულ სხვაობიანი ოპერატორით A^h ისე, რომ ამ უკანასკნელმა შეინარჩუნოს საწყისი ოპერატორის ძირითადი ინტეგრალური მახასიათებლები. შემოთაღწერილ ბადეზე ამის გაკეთება საკმაოდ მარტივია. საკმარისია ყველა სივრცითი კერძო წარმომებული შევცვალოთ შესაბამისი სასრულ-სხვაობიანი ანალოგიით ცენტრალური სხვაობების გამოყენებით.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\nabla_x \varphi_{i,j} = \frac{\varphi_{i+1/2,j} - \varphi_{i-1/2,j}}{\Delta x},$$

$$\nabla_y \varphi_{i,j} = \frac{\varphi_{i,j+1/2} - \varphi_{i,j-1/2}}{\Delta y},$$

სადაც Δx და Δy სხვაობიანი ბადის ბიჯებია. მაშინ საბოლოოდ მივიღებთ შემდეგ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{dU_{i+1/2,j}}{dt} + \frac{1}{2} [\nabla_x (uU)_{i+1/2,j} + u_{i+1/2,j} \nabla_x U_{i+1/2,j}] + \frac{1}{2} [\nabla_y (vU)_{i+1/2,j} + v_{i+1/2,j} \nabla_y U_{i+1/2,j}] - f\bar{V}_{i+1/2,j} + g\eta_{i+1/2,j} \nabla_x \xi_{i+1/2,j} = \frac{F_{i+1/2,j}^x}{\eta_{i+1/2,j}},$$

$$\frac{dV_{i,j+1/2}}{dt} + \frac{1}{2} [\nabla_x (uV)_{i,j+1/2} + u_{i,j+1/2} \nabla_x V_{i,j+1/2}] + \frac{1}{2} [\nabla_y (vV)_{i,j+1/2} + v_{i,j+1/2} \nabla_y V_{i,j+1/2}] - f\bar{U}_{i,j+1/2} + g\eta_{i,j+1/2} \nabla_y \xi_{i,j+1/2} = \frac{F_{i,j+1/2}^y}{\eta_{i,j+1/2}},$$

$$\frac{d\xi_{i,j}}{dt} + \nabla_x (U\eta)_{i,j} + \nabla_y (V\eta)_{i,j} = 0,$$

სადაც:

$$\bar{U}_{i,j+1/2} = \frac{U_{i-1/2,j} + U_{i-1/2,j+1} + U_{i+1/2,j} + U_{i+1/2,j+1}}{4},$$

$$\bar{V}_{i+1/2,j} = \frac{V_{i,j-1/2} + V_{i,j+1/2} + V_{i+1,j-1/2} + V_{i+1,j+1/2}}{4}.$$

(3) სისტემის რეალიზაცია დროის მიხედვით შეიძლება განხორციელდეს, როგორც ცხადი სქემით, ასევე არაცხადი ან კრანკ-ნიკოლსონის სქემით. მართალია წრფივი სისტემების შემთხვევაში არაცხადი სქემები იძლევიან აბსოლუტური მდგრადობის გარანტიას და ამასთან კრანკ-ნიკოლსონის სქემით უზრუნველყოფილია მეორე რიგის აპროქსიმაცია თანაბარ ბადეზე, მაგრამ არანრფივი განტოლებების შემთხვევაში ანალოგიური შეფასებების მიღება ჯერ-ჯერობით არ ხერხდება, ამასთან ერთად არაცხად სქემებს მიეყვართ არითმეტიკული ოპერაციების რაოდენობის სოლიდურ ზრდამდე, რაც უარყოფითად აისახება ამოცანის ამოხსნის სისწრაფეზე. აქედან გამომდინარე მოცემულ ნაშრომში ავორითმის რეალიზაცია დროის მიხედვით ხდება ცხადი სქემით, რაც ინვესტ გარკვეულ შეზღუდვას დროითი ბიჯის მიმართ. ამ შემთხვევაში სხვაობიანი სქემის მდგრადობის უზრუნველსაყოფად უნდა დავიცვათ კურანტის ცნობილი პირობა:

$$\frac{\Delta t}{\Delta L} < \frac{1}{\sqrt{2gh_{\max}}}, \text{ სადაც } \Delta L = \max(\Delta x, \Delta y).$$

აღვლილი შესამჩნევია, რომ წყლის ნაკადების ძირითად მამოძრავებელ ძალას მოცემულ მოდელში – სანყისი მდგომარეობის გარდა – წარმოადგენს ატმოსფერული ქარის ზემოქმედება. ამიტომ თუ თვლას ვახორციელებთ მუდმივი ქარის ზემოქმედების ქვეშ, მაშინ გარკვეული დროის შემდეგ განსახილველ არეში სისტემა აუცილებლად მიაღწევს სტაციონალურ მდგომარეობას. აქედან გამომდინარე მოცემული მოდელის საშუალებით შეიძლება ვანარმოოთ ორი ტიპის ამოცანის თვლა:

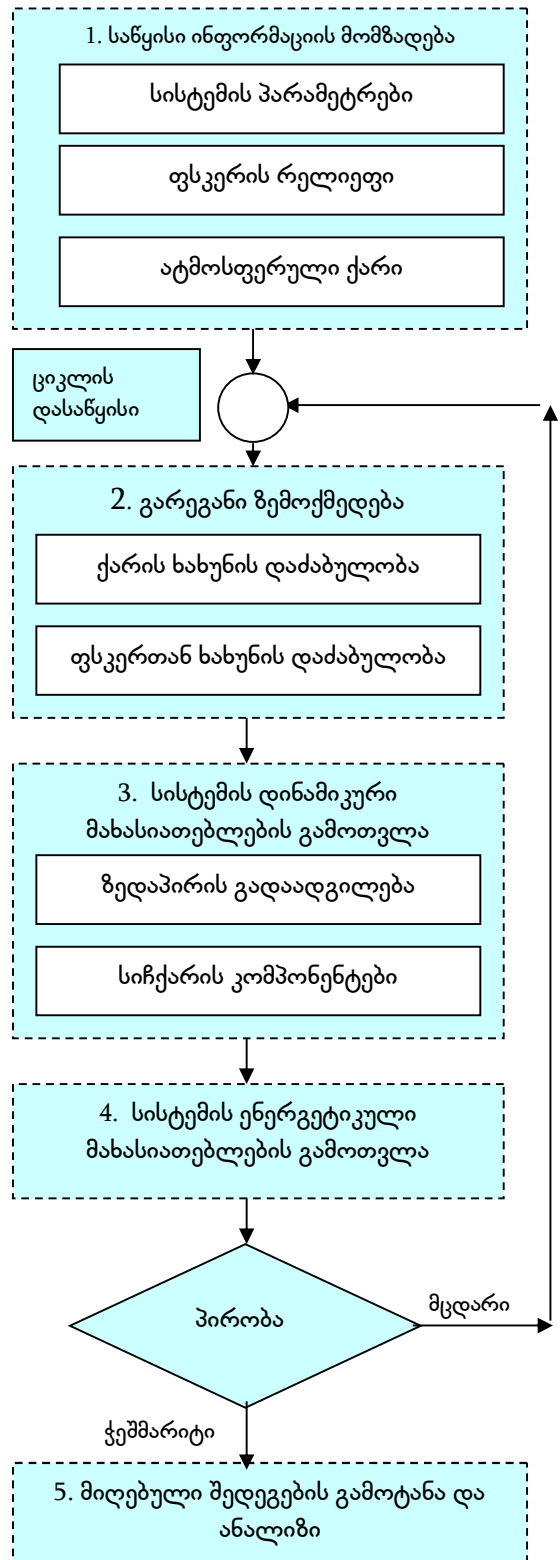
1. ამოცანა მუდმივი ქარის ზემოქმედების ქვეშ ნულაგანი სანყისი პირობებიდან სტაციონალური რეჟიმის დამყარებამდე.
2. არასტაციონალური ამოცანის თვლა რაიმე სანყისი მდგომარეობიდან რეალურ რეჟიმში მოქმედი ქარის პირობებში.

ორივე ამოცანის რეალიზაცია ხორციელდება ერთი და იმავე სქემით, რომელიც ნახ. 2.-ზეა გამოსახული.

3. რიცხვითი ექსპერიმენტების აღწერა

აღწერილი მოდელის საშუალებით ჩატარებული იქნა რიცხვითი ექსპერიმენტები მოდელური არისათვის რომლის ზომები (15 კმ და 10 კმ) ახლოსაა რეალურთან და რელიეფი საკმაოდ ზოგადია (ნახ. 3.). მოდელში გამოიყენებოდა პარამეტრების შემდეგი მნიშვნელობები: გრავიტაციული მუდმივა $g=980 \text{ სმ/წმ}^2$,

კორიოლისის პარამეტრი $f = 0.95_{10-04} \text{ წმ}^{-1}$, ფსკერზე ხახუნის დაძაბულობის ვექტორი $\vec{\tau}^1(\tau_x^1, \tau_y^1)$ გამოითვლება ფორმულებით:



ნახ.2. ამოცანის ამოხსნის ალგორითმის სტრუქტურა

$$\tau_x^1 = b \cdot \sqrt{u^2 + v^2} \cdot u,$$

$$\tau_y^1 = b \cdot \sqrt{u^2 + v^2} \cdot v,$$

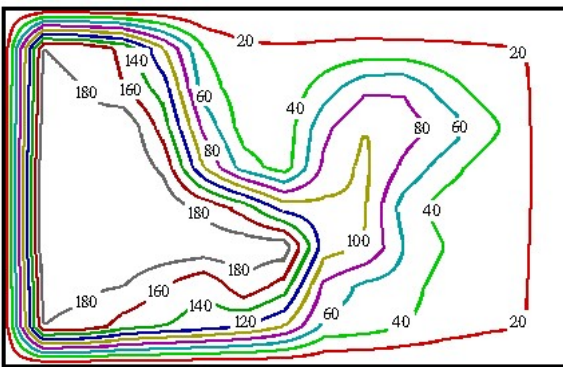
სადაც $b = 0,003$

ატმოსფერული ქარის ხახუნის დაძაბულობის ვექტორი $\vec{\tau}^0 (\tau_x^0, \tau_y^0)$ გამოითვლება ფორმულებით:

$$\tau_x^0 = b_1 \cdot \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \cdot W_x,$$

$$\tau_y^0 = b_1 \cdot \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \cdot W_y,$$

სადაც $b_1 = 3,2_{10} \cdot 10^{-6}$.

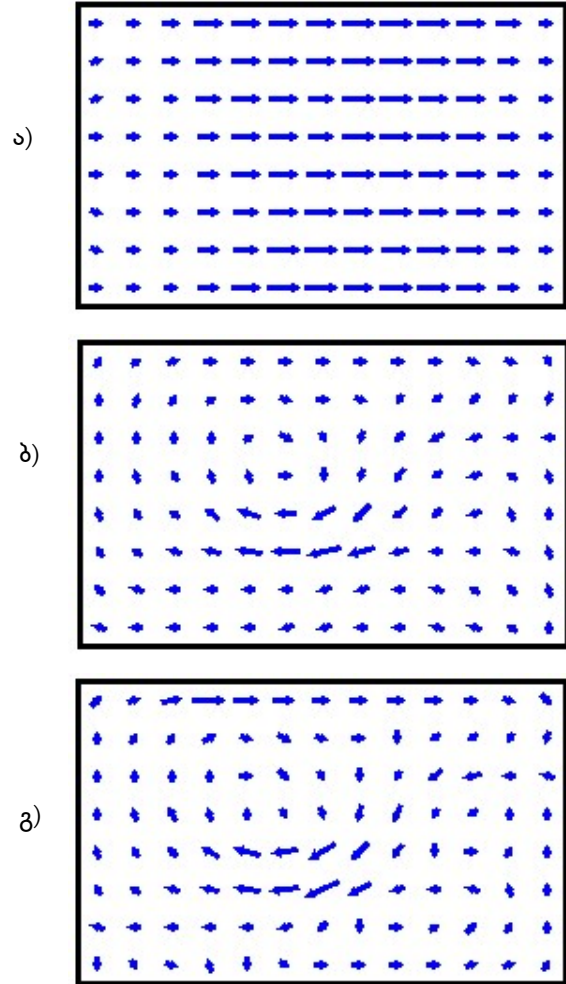


ნახ. 3. სათვლელი არის ფსკერის რელიეფი

წყლის მასების მთავარი მამოძრავებელ ძალას მოცემულ მოდელში წარმოადგენს ატმოსფერული ქარის ზემოქმედება. რიცხვითი ექსპერიმენტები მიმდინარეობდა სხვადასხვა მიმართულების ქარის ზემოქმედების შემთხვევაში სისტემის ნულოვანი (შეუშვოთებელი ბასინი) მდგომარეობიდან კვაზი სტაციონალური რეჟიმის დამყარებამდე. აქ წარმოდგენილ ყველა ექსპერიმენტში ქარის სიჩქარე ტოლია 10 მ/წმ-ის.

ნახ. 4. -ზე წარმოდგენილია თვლის შედეგები დასავლეთის ქარის ზემოქმედების შემთხვევაში თვლის დაწყებიდან 20 წუთის შემდეგ, 2 საათის შემდეგ და 8 საათის შემდეგ. ადვილი შესამჩნევია, რომ თვლის დასაწყისისათვის დინების მიმართულება ემთხვევა ქარის მიმართულებას, მაგრამ დროთა განმავლობაში იზრდება გეოსტროფული ძალების მოქმედების მნიშვნელობა და თანდათან ფორმირდება წყლის მასების ცირკულაცია, რომელშიც საბოლოოდ რამდენიმე წრებრუნვა გამოიყოფა. 8 საათისათვის დინებათა კვაზისტაციონალური რეჟიმი დამყარებულია და შემდგომში არსებითი ცვლილება არ ხდება. სურათზე განსაკუთრებით გამოიყოფა ანტიციკლონური მიმართულების დინება

განსახილველი არის ჩრდილო დასავლეთ ნაწილში, რომლის ფარგლებშიც აღწევს დინების ნაკადის სიჩქარე მაქსიმალურ მნიშვნელობას 7-8 სმ/წმ.



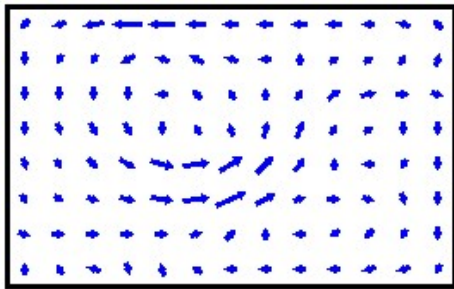
ნახ.4. დინებათა სისტემა დასავლეთის ქარის შემთხვევაში ა) 20 წუთის შემდეგ - $U_{max}=0,42$ სმ/წმ

ბ) 2 საათის შემდეგ - $U_{max}=3,15$ სმ/წმ და გ) 8

საათის შემდეგ - $U_{max}=7,24$ სმ/წმ

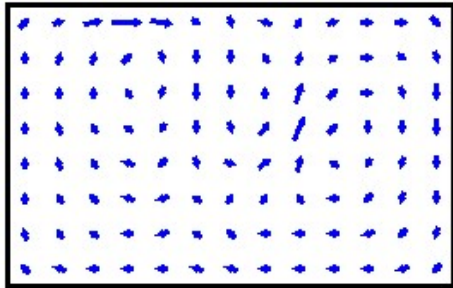
აღსანიშნავია, რომ იმავე სიძლიერის აღმოსავლეთის ქარის შემთხვევაში მიღებული დინებათა სქემა ანალოგიურია, მხოლოდ ნაკადების მიმართულებები იცვლება საპირისპიროთი (ნახ. 5.).

ნახ. 6.-ზე წარმოდგენილია ჩრდილოეთისა და სამხრეთის ქარის ზემოქმედების შემთხვევაში მიღებული სტაციონალურ დინებათა სქემები. როგორც ვხედავთ ამ შემთხვევაშიც წყლის ნაკადების ცირკულაცია ერთმანეთის მსგავსია მხოლოდ მიმართულებებია საპირისპირო.

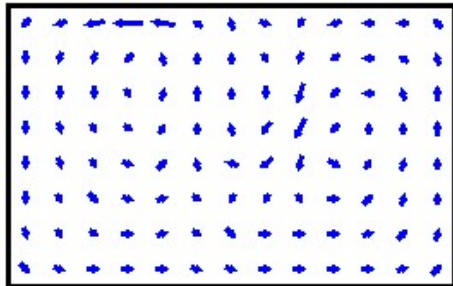


ნახ. 5. დინებათა სისტემა აღმოსავლეთის ქარის ზემოქმედებისას - $U_{max}=7.23$ სმ/წმ

ა)



ბ)



ნახ. 6. დინებათა სისტემა ა) ჩრდილოეთის ქარის შემთხვევაში - $U_{max}=7.52$ სმ/წმ და ბ) სამხრეთის ქარის შემთხვევაში - $U_{max}=7.56$ სმ/წმ

III. დასკვნა

ნაშრომში შემოთავაზებული მოდელი ხარისხობრივად და რაოდენობრივად კარგად აღწერს რეალურ გარემოში მიმდინარე ფიზიკურ პროცესს და ის შეიძლება წარმატებით იქნას გამოყენებული შესაბამისი ტიპის წყალსაცავების დინამიკური მახასიათებლების ცვლილების პროგნოზირებისათვის. მოცემული მოდელის საშუალებით შემდგომში შესაძლებელია ისეთი ამოცანების გადაწყვეტა, როგორცაა გარემოს რესურსების რაციონალური გამოყენება და ეკოლოგიურ მდგომარეობის პროგნოზირება.

გამოყენებული ლიტერატურა

- [1] Марчук Г. И. , Кочергин В. П. И др. Математические модели циркуляции в океане.-Новосибирск: Наука, 1980. – 288 с.
- [2] Sarkisyan A. S. The diagnostic calculations of the large-scale oceanic circulation// The Sea. 1997, v. 6, pp. 362-458.
- [3] Brayan K. Models of the ocean circulation and the global heat balance.- WWO, GARP Publication, Geneva, 1979, v. 2, N 22, pp. 23-40.
- [4] Гиргвлиანი А.Г. О численном моделировании задач мелкой воды: Препринт № 454.- Новосибирск 1983.-18 с.- В надзаг.: ВЦ СО АН СССР.
- [5] Girgvliani A.G., Marri E. Numerical modeling of the dynamics of eastern Black Sea coast zone with the consideration of mobile coastline. J of Georgian Geophys. Soc. 2000, vol 5B, pp 24-32.